カルタン行列の固有値と単因子について(群論とその周辺)

清田, 正夫; 野村, 和正

数理解析研究所講究録
第 1564 巻 2007 年 23-26

カルタン行列の固有値と単因子について
On eigenvalues and elementary divisors of Cartan matrices

東京医科歯科大学教養部　清田正夫、野村和正
College of Liberal Arts and Sciences
Tokyo Medical and Dental University
Masao KIYOTA and Kazumasa NOMURA

1 序文

G を有限群、F を標数 $p>0$ の代数閉体とする。群環 FG は直既約な両側イデアル B_i 達の直和に分解され、各 B_i は FG のブロックと呼ばれている。ブロック B の主要な不変量として、

$l(B)$: B に属す単純 FG 加群の個数、
$k(B)$: B に属す通常既約指標の個数、
$|D|$: B の不足群 D の位数、
カルタン行列 C の単因子

等があり、これらの不変量の間の関係について様々な研究がなされてきた。ここではブロック B の新しい不変量としてカルタン行列 C の固有値をとり上げ、C の単因子との関係を調べる。まず最初にカルタン行列 C の定義を復習する。

$S_1,\ldots,S_l$ $(l=l(B))$ を B に属す単純 FG 加群とし、P_i を S_i の射影被覆とする。整数 $c_{ij}=\dim_F\mathrm{Hom}_{FG}(P_i,P_j)$ をカルタン不変数と呼び、$l\times l$ 行列 $C=(c_{ij})$ をブロック B のカルタン行列という。

カルタン行列 C の単因子や固有値については次の事実がよく知られている。

（事実１）C の行列式 $\det C$ は p べきである。

（事実２）C の最大の単因子は $|D|$ と一致していて、他の単因子はすべて $|D|$ より小さい。

（事実３）C の固有値はいずれも正の実数で、その最大固有値は単根である。これを C のフロベニウス固有値と呼び、$\rho(C)$ で表す。

C の固有値について、村井、和田、清田は [K-M-W] で次の２つを予想した。

（予想１）　もし $\rho(C)=|D|$ ならば C の固有値全体と C の単因子全体は一致するか？

（予想２）　もし $\rho(C)$ が整数ならば、$\rho(C)=|D|$ となるか？

[K-M-W] において (a) G が p 可解群のとき、(b) $D \trianglelefteq G$ のとき、(c) B が巡回ブロックや tame 型のときには（予想１）が成立することが確かめられている。また（予想２）は (b), (c) の場合には正しい。G が p 可解群のときでも（予想２）は証明されていない。

上の予想をさらに推し進めて、次の予想が、和田 [W] で提出された。

（予想３）　C の固有多項式 $f_C(x)$ の $\mathbf{Z}[x]$ における既約分解を

$$f_C(x) = f_1(x) \cdots f_t(x)$$

とする。ここで $f_i(x)$ は monic で、$\rho(C)$ は $f_1(x) = 0$ の根とする。このとき C の単因子全体が t 個の集合 $E_1, \cdots, E_t$ に分割され、次の (1), (2), (3) が成立するか？

(1)　$deg\, f_i = |E_i| \qquad (i = 1, \ldots, t)$

(2)　$f_i(0) = \pm \prod_{e \in E_i} e \qquad (i = 1, \ldots, t)$

(3)　$|D| \in E_1$

（予想３）は（予想２）の一般化であることに注意する。[W] において $l(B) \leq 5$ の巡回ブロックや tame 型ブロックの場合は、（予想３）が成立することが確かめられている。また、（予想３）の成立を仮定するとき、カルタン行列 C の固有値に単元 (unit) が k 個現れるならば、C の最初の k 個の単因子はすべて 1 となることが導かれる。この単元固有値に関する命題は以下の定理の系として証明することができる。

2　定理

カルタン行列 C の固有値と単因子の関係について、次の定理が得られた。

定理１　C をブロック B のカルタン行列とする。$\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ を C の固有値全体とし、$\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l = |D|$ を C の単因子全体で　$\epsilon_i \,|\, \epsilon_{i+1} \ (i = 1, \cdots, l-1)$　を満たすとする。このとき、任意の k $(1 \leq k \leq l)$ にたいして、代数的整数の意味で、$\epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_k$ は $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k$ を割り切り、逆に、$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k$ は $\epsilon_{l-k+1} \cdots \epsilon_{l-1} \epsilon_l$ を割り切る。

定理１で $k = 1$ とすれば、次の系２が得られる。

系2　カルタン行列 C の任意の固有値 λ について $\dfrac{\lambda}{\epsilon}$, $\dfrac{|D|}{\lambda}$ はともに代数的整数である、ここで $\epsilon = \epsilon_1$ は C の第1単因子を表わす。

系2の後半の主張は既に和田、清田 [K-W] で述べられていて、定理1の証明にも使われる。定理1から直ちに、序文の最後で述べた系が得られる。

系3　定理1の記号のもとで、 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ がすべて単元 (unit) ならば、$\epsilon_1 = \cdots = \epsilon_k = 1$ となる。

また p 可解群のカルタン行列の単元固有値に関しては次の命題が成り立つ。

命題4　G が p 可解群のとき、カルタン行列の固有値 λ が単元ならば、$\lambda = 1$ となる。

3　証明

定理1の証明には次の一般的定理が用いられる。

定理5　R を標数 0 の単項イデアル整域とし、A を n 次 R 行列とする。$\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ を A の R-単因子で、$\epsilon_i \mid \epsilon_{i+1}$ $(i = 1, \cdots, l-1)$ を満たすものとする。A の固有多項式 $f_A(x)$ が $R[x]$ において

$$f_A(x) = g(x)h(x), \quad g(x), h(x) : \text{monic in } R[x]$$

と分解され、$g(x)$ の次数が $k\,(\geq 1)$ ならば、R の元 c が存在して

$$g(0) = c\epsilon_1 \cdots \epsilon_k$$

と書ける、すなわち $\epsilon_1 \cdots \epsilon_k$ は $g(0)$ を割り切る。

定理5を認めれば、定理1は次のように導くことができる。カルタン行列 C の固有値すべてを有理数体に添加して得られる代数体を K とし、K の整数環を O とする。P を p を割る O の素イデアルとし、$R = \{a/b \mid a, b \in O, b \notin P\}$ とおく。R が単項イデアル整域となることはよく知られている。C の行列式は p べきなので、C の $\mathbf{Z}$-単因子は R-単因子でもあることに注意する。R は固有値 λ_i をすべて含むので、$g(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$ は固有多項式 $f_C(x)$ の $R[x]$ 因子となる。定理5を C に適用すれば、$c \in R$ がとれて、$g(0) = c\epsilon_1 \cdots \epsilon_k$ と書ける。$\epsilon_1 \cdots \epsilon_k$ は p べきなので、$c \in O$ となる。よって、$\epsilon_1 \cdots \epsilon_k \mid \lambda_1 \cdots \lambda_k$ in O. 後半の証明は整数行列 $|D|C^{-1}$ に定理5を用いて得られる。定理5の証明は省略する。

命題4は次の補題からすぐに得られる。

補題6 C をブロック B のカルタン行列とする。 B に属する単純 FG 加群がすべて liftable とする。このとき、 C の固有値 λ はすべて $\lambda \geq 1$ を満たす。

補題6から命題4はつぎのように容易に証明される。G を p 可解群とすれば、Fong-Swan の定理より、単純 FG 加群はすべて liftable である。カルタン行列 C の固有値 λ が単元と仮定する。このとき λ のノルム $N(\lambda)$ は $\mathbf{Z}$ の単元なので、± 1 となる。λ の共役もまた C の固有値なので、番号をとりかえれば、

$$N(\lambda) = \lambda_1 \cdots \lambda_k$$

と書ける。よって $\lambda_1 \cdots \lambda_k = 1$ となる。補題6より $\lambda_i \geq 1$ 、従って $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 1$、つまり $\lambda = 1$ が得られる。補題6の証明は省く。

参考文献

[K-W] M. Kiyota and T. Wada, Some remarks on eigenvalues of Cartan matrices in finite groups, Comm. in Algebra, 21 (1993) 3839-3860

[K-M-W] M. Kiyota, M. Murai and T. Wada, Rationality of eigenvalues of Cartan matrices in finite groups, J. of Algebra, 249 (2002) 110-119

[W] T. Wada, Eigenvalues and elementary divisors of Cartan matrices of cyclic blocks with $l(B) \leq 5$ and tame blocks, J. of Algebra, 281 (2004) 306-331